### Основні властивості найпростіших геометричних фігур

#### Означення. Аксіоми

**Геометрія** — це наука про властивості геометричних фігур.
Зверніть увагу: геометрична фігура — це не тільки трикутник, коло, піраміда тощо, а й будь-яка множина точок.
**Планіметрія** — це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури на площині.
**Точка** і **пряма** є основними поняттями планіметрії. Це означає, що цим поняттям не можна дати точне означення. Їх можна тільки уявити, спираючись на досвід та перелічивши їхні властивості.
Твердження, справедливість яких приймається без доведення, називаються **аксіо­мами**. Вони містять формулювання основних властивостей найпростіших фігур.
Твердження, які доводять, називаються **теоремами**.
**Означення** — це пояснення якогось поняття, яке спирається або на основні поняття, або на поняття, що визначені раніше.
Позначення: точки позначаються великими латинськими буквами; прямі — малими латинськими буквами або двома великими латинськими буквами (якщо на прямій позначені дві точки).
На рисунку зображено точки A, B, C, N, М та прямі a і b. Пряму а можна позначити як пряму MN (або NM).

Запис означає, що точка M лежить на прямій а. Запис означає, що точка С не лежить на прямій а.
Треба розуміти, що прямі a і b на рисунку перетинаються, хоча ми не бачимо, у якій ­точці.

##### Основні властивості (аксіоми) належності точок і прямих на площині

Аксiома І.
1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.
2. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну. (Треба розуміти, що тут містяться два твердження: по-перше — існування такої прямої, а по-друге — її єдиність.)
Аксiома ІІ. Із трьох точок на прямій одна й тільки одна лежить між двома іншими.
**Відрізком** називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називаються **кінцями відрізка**. На рисунку зображено відрізок АВ (відрізок позначають, записуючи його кінці).


##### Основні властивості (аксіоми) вимірювання відрізків

Аксiома ІІІ.
1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.
2. Довжина відрізка дорівнює сумі дов­жин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

##### Основна властивість розміщення точок відносно прямої на площині

Аксiома ІV. Пряма розбиває площину на дві півпло­щини.
Це розбиття має таку властивість: якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму; якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.
**Півпрямою**, або **променем**,називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки. Ця точка називається **початковою точкою променя**. Різні півпрямі однієї прямої зі спільною початковою точкою називаються **доповняльними**.
На рисунку подані промені AB (він же AC), DA (або DB, DC), BC, CB (або CA, CD), BA (або BD), AD.

Промені AB і AD, BC і BD — доповняльні. Промені BD і AC не є доповняльними, бо у них різні початкові точки.
**Кут** — це фігура, яка складається з точки — **вершини кута** і двох різних півпрямих, що виходять із цієї точки,— **сторін кута**.
Кут, поданий на рисунку, можна позначити так: , , .

Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими, кут називають **розгорнутим**:

Кажуть, що **промінь проходить між сторонами кута**, якщо він виходить з його вершини й перетинає який-небудь відрізок з кінцями на його сторонах. Для розгорнутого кута вважаємо, що будь-який промінь, який виходить з його вершини і відмінний від його сторін, проходить між сторонами кута.

##### Основні властивості вимірювання кутів

Аксiома V.
1. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює .
2. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

##### Основні властивості відкладання відрізків і кутів

Аксiома VІ. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної дов­жини, і тільки один.
Аксiома VІІ. Від будь-якої півпрямої у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за , і тільки один.
**Трикутником** називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються **вершинами трикутника**, а відрізки — ­його **сторонами**.
Трикутник на рисунку можна позначити так: або , і т. д.

Основні елементи поданного вище трикутника: сторони AB, AC, BC (або a, b, c); кути (або ), , . і — прилеглі до сторони AC. — протилежний стороні AC.
Трикутники називаються **рівними**, якщо у них відповідні сторони рівні й від­повідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін.
Запис означає (див. рисунок), що:
; ;
; ;
; .


##### Основна властивість існування рівних трикутників

Аксiома VІІІ. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.
Прямі називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються.
Паралельні прямі, зображені на рисунку, можна позначити так: або .


##### Аксіома паралельних прямих

Аксiома ІХ. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.
Зверніть увагу: аксіома стверджує єдиність такої прямої, але не стверджує її існування.

##### Взаємне розміщення прямих на площині

Дві прямі на площині можуть:
• збігатися;
• бути паралельними (тобто не перетина­тися);
• мати одну спільну точку.
(Дійсно, якщо б дві прямі могли мати хоча б дві спільні точки, то через ці дві точки проходили б дві різні прямі, що суперечить аксіомі І, п. 2).

#### Суміжні й вертикальні кути

Два кути називаються **суміжними**, якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони є доповняльними півпрямими.
На рисунку і — суміжні.


##### Властивості суміжних кутів

Теорема 1. Сума суміжних кутів дорівнює . (Зверніть увагу: кути, сума яких дорівнює , не обов’язково суміжні.)
Теорема 2. Коли два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні.
Теорема 3. Кут, суміжний із прямим ­кутом, є прямий кут.
Теорема 4. Кут, суміжний із гострим ­кутом, — тупий.
Теорема 5. Кут, суміжний із тупим кутом, — гострий.
Два кути називаються **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого.
На рисунку і , а також і — вертикальні:


##### Властивості вертикальних кутів

Теорема 1. Вертикальні кути рівні.
(Але не всі рівні кути вертикальні.)
Теорема 2. Кути, вертикальні рівним, ­рівні.
Якщо дві прямі перетинаються, то вони утворюють чотири нерозгорнутих кути (див. рисунок). Кожні два із цих кутів або суміжні, або вертикальні:

і ; і — вертикальні;
і ; і ; і ; і — суміжні.

#### Перпендикуляр

Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом (див. рисунок), тобто, коли вони перетинаються, утворюються чотири прямих кути.
Позначення: .

Теорема 1. Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму, і до того ж тільки одну.
**Перпендикуляром до даної прямої** називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним зі своїх кінців точку їх перетину.
На рисунку AB — перпендикуляр, проведений із точки A до прямої a. Точка B називається **основою перпендикуляра**.
Позначення: .
Теорема 2. Із будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр, і тільки один.
Зверніть увагу: теорема містить два твердження — існування перпендикуляра і його єдиність.

#### Бісектриса

**Бісектрисою кута** називається промінь, який виходить із вершини кута, проходить між його сторонами й ділить кут пополам.
На рисунку BD — бісектриса .

##### Властивості бісектриси

Теорема 1. Бісектриса кута утворює з його сторонами кути, не більші за .
Теорема 2. Бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій (тобто є доповняльними півпрямими).
Теорема 3. Бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.
Теорема 4. Бісектриса розгорнутого кута утворює прямий кут з його стороною.

#### Ознаки рівності трикутників

Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами й кутом між ­ними).
Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.
Теорема 2 (друга ознака рівності трикутників — за стороною й прилеглими до неї ку­тами).
Якщо сторона й прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
Теорема 3 (третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами).
Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

#### Висота, бісектриса, медіана трикутника

**Висотою** трикутника, опущеною з да­ної вершини, називається перпендикуляр, проведений із цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.
У кожному трикутнику можна провести три висоти. Висоти трикутника (або прямі, що їх містять) перетинаються в одній точці.
На рисунках зображено, як перетинаються висоти в гострокутному (рисунок 1), прямокутному (рисунок 2) і ту­покутному (рисунок 3) трикутниках.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3
Зверніть увагу: якщо в гострокутному трикутнику основи всіх висот лежать на сторонах трикутника, то в прямокутному дві з трьох висот збігаються зі сторонами, а основа висоти, що опущена з вершини гострого кута тупокутного трикутника, лежить на продовженні ­сторони.
**Бісектрисою** трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні.
У кожному трикутнику можна провести три бісектриси, які перетинаються в одній точці (див. рисунок). Ця точка є центром вписаного кола (див. далі).

**Медіаною** трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок, що сполучає цю вершину із серединою протилежної сторони. У трикутнику можна провести три медіани, які перетинаються в одній точці.

#### Рівнобедрений трикутник

Трикутник називається **рівнобедреним**, якщо у нього дві сторони рівні. Ці сторони називаються **бічними сторонами**, а третя сторона — **основою** трикутника.
На рисунку:
ABC — рівнобедрений трикутник;
— бічні сторони;
AC — основа.

Теорема 1. У рівнобедреному трикутнику кути при основі є рівними.
Теорема 2. У рівнобедреному трикутнику медіана, висота й бісектриса, проведені до основи, збігаються.
Теорема 3. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін (а також бісектриси й висоти), рівні.

#### Рівносторонній трикутник

Якщо всі сторони трикутника рівні, він називається **рівностороннім**.
На рисунку .

Теорема 1. У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
Теорема 2. У рівносторонньому трикутнику висота, медіана, бісектриса, проведені з однієї вершини, збігаються.
Теорема 3. У рівносторонньому трикутнику всі медіани (висоти, бісектри­си) рівні між собою.

#### Ознаки рівнобедреного трикутника

Теорема 1. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
Теорема 2. Трикутник рівнобедрений, ­якщо:
• одна з його висот є медіаною;
• одна з його медіан є бісектрисою;
• одна з його висот є бісектрисою.
Теорема 3. Трикутник рівнобедрений, ­якщо:
• дві його висоти рівні;
• дві його медіани рівні;
• дві його бісектриси рівні.
Аналогічно можна сформулювати ознаки рівностороннього трикутника.

#### Паралельні прямі

На рисунку зображені кути, утворені в результаті перетину двох прямих січною:

і ; і — внутрішні різносторонні кути при прямих a, b і січній c.
і ; і — внутрішні односторонні.
і ; і — зовнішні односторонні.
і ; і — зовнішні різносторонні.
і ; і ; і ; і — відповідні.

##### Властивості паралельних прямих

Теорема 1. Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то:
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює ;
3) зовнішні різносторонні кути рівні;
4) сума зовнішніх односторонніх кутів дорівнює ;
5) відповідні кути рівні.
На рисунку позначені числами чотири пари кутів. Теорема стверджує, що, якщо , то , ; ; ; :

Теорема 2. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.
Теорема 3. Через точку, що не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній.
Об’єднуючи це твердження з аксіомою IX, отримуємо: через точку, що не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній, причому тільки одну.

##### Ознаки паралельності прямих

Теорема 1. Якщо при перетині двох прямих третьою виконується хоча б одна з таких умов:
а) внутрішні різносторонні кути рівні;
б) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює ;
в) зовнішні різносторонні кути рівні;
г) сума зовнішніх односторонніх кутів дорівнює ;
д) відповідні кути рівні,— то прямі пара­лельні.
Теорема 2. Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
Теорема 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні одна одній.

#### Сума кутів трикутника

Теорема. Сума кутів трикутника дорівнює .
Із цієї теореми випливають наслідки:
1. У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі (тобто в трикутнику не може бути більше одного прямого або тупого ­кута).
2. Кути рівностороннього трикутника дорівнюють .
**Зовнішнім кутом трикутника** при даній вершині називається кут, суміжний із кутом трикутника при цій вершині (див. рисунок):


##### Властивості зовнішнього кута

Теорема 1. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.
Теорема 2. Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.
Теорема 3. Сума зовнішніх кутів трикутника дорівнює .

#### Прямокутний трикутник

Трикутник називається **прямокутним**, якщо він має прямий кут.
Сторона, яка лежить проти прямого кута, називається **гіпотенузою**.
Сторони, що утворюють прямий кут, називаються **катетами**.

На рисунку — прямокутний. AB і BC — катети, AC — гіпотенуза.
Теорема. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює .

##### Ознаки рівності прямокутних трикутників

Теорема 1. Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.
Теорема 2. Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
Теорема 3. Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого трикутника, то такі трикутники рівні.
Теорема 4. Якщо катет і прилеглий (протилежний) гострий кут одного прямо­кутного трикутника відповідно до­рівнюють катету й прилеглому (про­тилежному) гострому куту другого три­кутника, то такі трикутники ­рівні.

##### Властивість катета, протилежного куту в 30°

Теорема 1. У прямокутному трикутнику з кутом катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.
Теорема 2. Якщо в прямокутному трикутнику катет дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний цьому катету кут дорівнює .

#### Коло

**Колом** називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається **цент­ром** кола.
Відстань від точок кола до його центра називається **радіусом** кола. Радіусом також називається будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром.
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається **хордою**. Хорда, що проходить через центр кола, називається **діаметром**.
На рисунку зображено коло з центром у точці O. OA — радіус кола, MN — діаметр, BC — хорда.

Теорема 1. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.
Теорема 2. Діаметр, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї.
**Серединним перпендикуляром** до відрізка називається пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.
**Коло** називається **описаним навколо трикутника**, якщо воно проходить через усі його вершини.
Теорема 3. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Його центр — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.
Зверніть увагу: у гострокутному трикутнику центр описаного кола лежить у середині трикутника (рисунок нижче зліва). У прямокутному трикутнику центр описаного кола — середина гіпотенузи (рисунок посередині). Центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника, лежить поза трикутником (рисунок справа).


##### Дотична до кола

Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається **дотичною**. Дана точка кола називається **точкою дотику**.
Теорема 1. Дотична до кола має з ним єдину спільну точку — точку дотику.
На рисунку a — дотична.

Якщо два кола, які мають спільну точку, мають у ній спільну дотичну, кажуть, що ці **кола дотикаються**. Дотик кіл називають **внутрішнім**, якщо центри кіл лежать по один бік від їх спільної дотичної (рисунок нижче зліва), і **зовнішнім**, якщо центри кіл лежать по різні боки від спільної дотичної (рисунок справа).

Коло називається **вписаним у трикутник**, якщо воно дотикається до всіх його ­сторін.
Теорема 2. У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.
Теорема 3. Із будь-якої точки поза колом можна провести до кола дві дотичні. Відрізки цих дотичних від даної точки до точок дотику рівні. Промінь, що виходить із даної точки й проходить крізь центр кола, є бісектрисою кута між дотичними.
На рисунку нижче AB і AC — дотичні. Теорема стверджує, що AB = AC; AO — бісек­триса .


#### Геометричне місце точок

**Геометричним місцем точок (ГМТ)**, які мають певну властивість, називається така фігура, що складається з усіх точок площини, які мають цю властивість, і тільки з них.
Довести, що фігура М є ГМТ, які мають властивість Р, означає довести два такі твер­дження.
1. Якщо точка А ∈ М, то вона має властивість Р.
2. Якщо точка А має властивість Р, то А є М.
Приклади1) Коло — це ГМТ, рівновіддалених від даної точки.
2) Бісектриса кута — це ГМТ, рівно­віддалених від сторін кута (див. рисунок):

3. Серединний перпендикуляр до відрізка — це ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка (див. рисунок):


#### Пряма й обернена теореми

Формулювання теореми складається з двох частин. В одній говориться про те, що дано. Ця частина називається **умовою**. У другій частині говориться про те, що треба довести. Ця частина називається **висновком**.
Приклади1) Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°.

Умова Висновок
2) У прямокутному трикутнику центр описаного кола — середина гіпотенузи.
Умова: трикутник є прямокутним.
Висновок: центр описаного кола — сере­ди­на гіпотенузи.
3) Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
Дано (умова): прямі a, b, c; ;.
Довести (висновок): .
Якщо умови й висновок теореми поміняти місцями, отримаємо теорему, яка називається **оберненою** до даної (**«прямої»**) теореми. Такі дві теореми називають **взаємооберненими**. Кожну з них можна назвати прямою, тоді інша буде оберненою. Інколи із цих двох теорем правильною є тільки одна.
ПрикладПряма теорема. Якщо кути вертикальні, то вони рівні. (Правильно.)
Обернена теорема. Якщо кути рівні, то вони вертикальні. (Неправильно.)
Бувають випадки, коли правильними є обидві теореми.
ПрикладПряма теорема. Кути при основі рівнобед­реного трикутника рівні. (Пра­вильно.)
Обернена теорема. Якщо два кути трикутника рівні, то він рівнобедрений. (Правильно.)
У таких випадках використовують словосполучення «тоді й тільки тоді», «необхідно й достатньо».
Приклади1) Катет прямокутного трикутника тоді й тільки тоді дорівнює половині гіпотенузи, коли протилежний йому кут дорівнює . (Це твердження містить одночасно пряму й обернену теореми.)
2) Для того щоб прямі були паралельними, необхідно й достатньо, щоб внутрішні різносторонні кути були рівними.
Треба розуміти, що твердження «для того щоб прямі були паралельними, необхідно, щоб внутрішні різносторонні кути були рівними» означає властивість паралельних прямих.
Твердження «для того щоб прямі були паралельними, достатньо, щоб внутрішні різносторонні кути були рівними» означає ознаку паралельних прямих.

#### Доведеннявід супротивного

Цей спосіб доведення складається з таких етапів.
1. Припускають протилежне тому, що стверджується теоремою.
2. На основі припущення, спираючись на аксіоми і вже доведені теореми, роблять висновки.
3. Знаходять, у чому цей висновок суперечить умові, якійсь аксіомі або доведеній раніше теоремі.
4. Роблять висновок, що зроблене припущення неправильне, а тому правильне твердження теореми.
Особливо часто використовують цей спо­сіб доведення, коли треба довести єдиність якого-небудь об’єкта. (Припускають протилежне, тобто що таких об’єктів хоча б два.)
Приклад. Довести, що в трикутнику може бути тільки один тупий кут.
Доведення:1) Припустимо, що в трикутнику є два тупих кути.
2) Тоді сума кутів трикутника більша за , тому що міра тупого кута більша за .
3) Зроблений висновок суперечить теоремі про суму кутів трикутника.
4) Отже, наше припущення неправильне, а правильне те, що треба було довести.